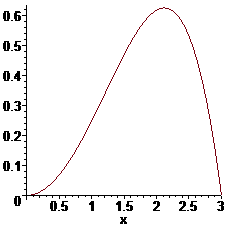
**Opgave 1 [25pt].**

Voor een kansvariabele is de volgende kansdichtheidsfunctie gegeven (zie hiernaast):

**1a [5pt]**. Toon aan dat inderdaad een kansdichtheidsfunctie is.

Je moet aantonen dat

1. 2pt
2. 3pt

Er geldt

1. Tussen 0 en 3 is , dus , en verder is , dus ook . Buiten is .
2. .

**1b [7pt]**. Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van .

**1c [4pt]**.Bereken de kans dat de waarde van tussen 1 en 2 zit.

**1d [2pt]**. De mediaan van de variabele is de waarde waarvoor geldt . Toon aan dat .

dus .

Er moet gelden .

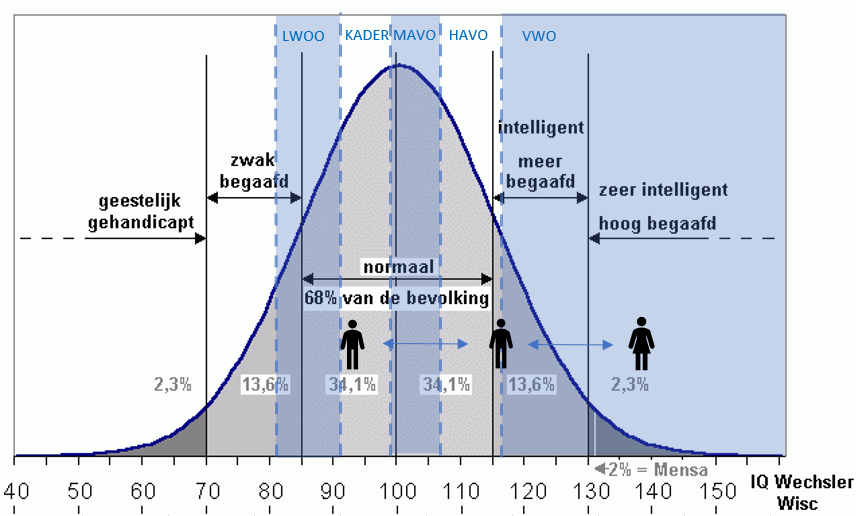
**1e [4pt]**. Bereken of schat de waarde van de mediaan in twee decimalen nauwkeurig.

Hint: Teken met de GR de functie (even wachten) en bereken voor welke waarde van deze functie gelijk is aan 0,5 (intersect). Of: Bereken met de GR de waarde van voor en pas net zolang aan tot de integraal in de buurt van 0,5 komt.

Antwoord: .

**1f [3pt]**. Bereken .

Omdat een continue kansverdeling heeft is de kans op een specifieke waarde altijd gelijk aan 0, dus ook .

**Opgave 2 [25pt]**

Het Intelligentie Quotiënt (IQ) is een getal dat een indicatie geeft van de intelligentie van een persoon. Er wordt aangenomen dat het IQ normaal is verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 15. Het IQ stijgt tot de leeftijd van 18 jaar en neemt daarna niet meer toe.

Voor het vwo wordt een gemiddelde IQ waarde gehanteerd van minimaal 116, voor Havo een waarde van 107, voor VMBO-tl/Mavo een minimum IQ van 100, voor VMBO-kl een waarde van 92 en het LWOO (LeerWeg Ondersteunend Onderwijs) vanaf de waarde 82.

**2a [4pt].** Wat is de kans dat een kind een advies VWO krijgt? Neem aan dat de IQ grenzen van hierboven strikt worden aangehouden, dat alle kinderen het basisonderwijs afronden en dat hun IQ zich na het basisonderwijs gedraagt volgens de normale verdeling van het IQ.

De kans dat iemand een IQ heeft van minstens 116 is .

**2b [5pt]**. Laat zien dat de kans dat iemand die in het vervolgonderwijs (vanaf LWOO) terecht komt een VWO advies krijgt gelijk is aan 0,1617.

De kans dat iemand in het vervolgonderwijs terecht komt is gelijk aan de kans dat die persoon een IQ het van minstens 82: . De (conditionele) kans dat iemand VWO advies krijgt terwijl je weet dat hij in het vervolgonderwijs komt is dus

**2c [6pt]**. Uit gegevens van het CBS blijk dat in 2020 van de 190.971 leerlingen in het middelbaar onderwijs er 42.302 op het VWO zaten. Veronderstel dat deze verdeling tot stand zou zijn gekomen puur op basis van een IQ grens, welke IQ ondergrens zou er dan gehanteerd zijn voor het VWO advies? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

De kans dat een leerling op het VWO zit is 42302/190971 = 0,2215. Dit is de conditionele kans dat iemand op het VWO zit, terwijl hij een leerling, ofwel

Ofwel:

Bij deze rechteroverschrijdingskans hoort een linkeroverschrijdingskans van 1 – 0,1864 = 0,8136, hierbij hoort een IQ waarde van 113,4.

**2d [1pt].** Hoe hoog is je IQ, of hoe hoog schat je het in? Serieus antwoord graag!

**2e [5pt].** Met een IQ van minstens 130 wordt iemand hoogbegaafd genoemd. Acht je het waarschijnlijk dat er onder 80 eerstejaars MBW/KW studenten (60 cadetten en 20 adelborsten) wel een hoogbegaafde adelborst is, maar geen hoogbegaafde cadet? Ondersteun je mening met een berekening.

We nemen aan dat cadetten en adelborsten niveau VWO hebben. De kans dat een VWO-er hoogbegaafd is is (conditionele kans)

Onder 80 studenten zijn er gemiddeld 80\*0,1593 = 12,7 hoogbegaafde studenten.

De kans dat er onder 20 adelborsten (minstens) een hoogbegaafde is is:

De kans dat er onder 60 cadetten geen hoogbegaafde is is:

De gevraagde kans is dus (afgerond).

**2f [4pt].** Met een IQ onder de 70 is een persoon geestelijk gehandicapt. Leg zonder een berekening te maken uit waarom het aantal geestelijk gehandicapten naar verwachting gelijk is aan het aantal hoog begaafden.

De geestelijk gehandicapten liggen qua IQ twee standaarddeviaties (2\*15 = 30) of meer onder het gemiddelde, terwijl hoogbegaafden met IQ twee standaarddeviaties of meer boven het gemiddelde scoren. De normale verdeling is symmetrisch, dus dit zijn er ongeveer evenveel.

**Opgave 3 [25pt]**

Begin 2020 had Nederland 8,7 miljoen auto’s op 8 miljoen huishoudens. We nemen aan dat het aantal auto’s in een gezin verdeeld is volgens een Poissonverdeling.

**3a [4pt].** Toon aan dat de gemiddelde waarde en de standaarddeviatie van het aantal auto’s in een huishouden gelijk zijn aan respectievelijk 1,0875 en 1,0428 auto’s per huishouden.

Gemiddeld zijn er per huishouden auto’s. De standaarddeviatie in de Poissonverdeling is auto’s per huishouden.

**3b [6pt].** De Poissonverdeling is discreet, maar wel oneindig, d.w.z., er is een kans dat een huishouden 100 auto’s bezit of 1000, maar die kans is wel astronomisch klein. Bereken het kleinste aantal auto’s waarvoor geldt dat de kans dat een huishouden zoveel auto’s bezit kleiner is dan 0,0001.

Er geldt (let op: pdf!):

Het kleinste aantal auto’s is dus 8.

**3c [8pt]**. Bereken de kans dat 100 huishoudens bij elkaar meer dan 110 auto’s hebben. Maak hierbij gebruik van de centrale limietstelling.

De Poissonverdeling is een discrete verdeling met en . Volgens de centrale limietstelling is het aantal auto’s in 100 huishoudens dan verdeeld als een normale verdeling met en . De kans dat er minstens 111 auto’s zijn is dus (met continuïteitscorrectie):

**3d [7pt]**. Bereken de kans dat 100 huishoudens bij elkaar meer dan 110 auto’s hebben. Maak hierbij gebruik van de Poissonverdeling.

Het aantal auto’s van 100 huishoudens gedraagt zich als een Poissonverdeling met . De gevraagde kans is dus

**Opgave 4 [25pt]**

In een militair depot in oorlogstijd worden materialen aangevoerd door middel van 12-tonners in 20ft zeecontainers. De truck keert terug met een lege container en de volle containers worden geleegd, gesorteerd en opgeslagen in het depot. Tegelijkertijd arriveren er lege viertonners die lading komen halen om naar locaties in de buurt van operaties te vervoeren. Voor het gemak nemen we aan dat 12-tonners 12 ton lading aanvoeren en dat viertonners 4 ton lading afvoeren.

De 12-tonners arriveren met een gemiddelde van voertuigen per uur, van de viertonners arriveren er gemiddeld van per uur. De aankomsten van viertonners en van 12-tonners kunnen elke 24 uur met een Poissonverdeling worden beschreven. De 12-tonners arriveren met een gemiddelde van voertuigen per uur, van de viertonners arriveren er gemiddeld per uur. Per 24 uur zijn deze waarden vast, maar elke dag kunnen de waarden veranderen.

**4a [7pt]**. Op een bepaalde dag (24 uur) arriveren er 7 12-tonners en er arriveren gemiddeld viertonners per uur. Wat is de kans dat de geleverde lading van deze 24 uur door de arriverende viertonners kan worden afgevoerd? Houd hierbij geen rekening met transactietijd in het depot (uitladen, opslaan, orderpicken, inladen).

In deze 24 uur arriveert er 7×12 ton lading, hiervoor zijn 712/4 = 21 viertonners nodig. De viertonners arriveren met een gemiddeld aantal van 0,9×24 = 21,7 viertonners per 24 uur.

De kans dat er minstens 21 viertonners arriveren is

**4b [5pt].** Er is net een viertonner binnengekomen. Bereken de kans dat de volgende viertonner binnen een uur binnenkomt.

Deze kans is .

**4c [8pt].** De commandant van het depot verwacht voor de volgende 24 uur gemiddeld 12-tonners per uur. Hij wil met 99% zekerheid weten wat het maximale aantal 12-tonners is dat die dag kan arriveren. Bereken dat aantal.

Hij wil de grootste weten zodanig dat . Dat betekent dat

De grootst mogelijke is dan 16, want

**4d [5pt]**. De commandant wil vervolgens weten wat de minimale voor die 24 uur moet zijn zodat hij met 99% zekerheid de aangevoerde lading ook weer kan afvoeren in het geval van de uiterste situatie berekend in 4b. Bereken deze Als je niet zeker bent van je antwoord in 4b, ga dan uit van 17 12-tonners

Voor het afvoeren van de lading van 16 12 tonners zijn 48 viertonners nodig. De kleinste waarvoor de kans minstens 99% is dat er minstens 48 viertonner zullen zijn voldoet aan

De solver levert:

**4e. [Bonusvraag 10 extra punten]** De commandant laat zijn berekening aan zijn PLV zien en zegt dat hij nu met de in 4c berekende waarde 99% zekerheid heeft dat de aangeleverde lading kan worden afgevoerd. Na wat nadenken zegt de PLV dat hij het daar niet mee eens is. Volgens hem kan het in 4c mis gaan als er teveel 12-tonners komen, daar is 1 % kans op, maar het kan ook in 4d mis gaan als er te weinig viertonners komen, daar is ook 1 % kans op. Er is dus in totaal 2% kans dat het mis gaat, dus de betrouwbaarheid is maar 100 – 2 = 98%. Wie heeft er gelijk? Wat is uiteindelijk de betrouwbaarheid als de waarde uit 4c wordt gehanteerd? Hint: Dit kost je minstens een kwartier. Bekijk alle mogelijkheden voor inkomende aantallen12-tonners en reken in minstens 5 cijfers nauwkeurig.

De betrouwbaarheid hangt af van hoeveel 12-tonners er arriveren:

Bij 16 12-tonners (kans 0,0066) moeten er minstens 48 viertonners zijn (kans

Alle mogelijkheden staan in de volgende tabel:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Aantal  12-ton | Kans | Minim  4-ton | Kans | Kans totaal  (product) |
| 0 | 0,000225 | 0 | 1 | 0,000225 |
| 1 | 0,001889 | 3 | 1 | 0,001889 |
| 2 | 0,007933 | 6 | 1 | 0,007933 |
| 3 | 0,022213 | 9 | 1 | 0,022213 |
| 4 | 0,046648 | 12 | 1 | 0,046648 |
| 5 | 0,078369 | 15 | 1 | 0,078369 |
| 6 | 0,109716 | 18 | 1 | 0,109716 |
| 7 | 0,131659 | 21 | 1 | 0,131659 |
| 8 | 0,138242 | 24 | 1 | 0,138242 |
| 9 | 0,129026 | 27 | 1 | 0,129026 |
| 10 | 0,108382 | 30 | 1 | 0,108382 |
| 11 | 0,082764 | 33 | 0,999997 | 0,082764 |
| 12 | 0,057935 | 36 | 0,999974 | 0,057933 |
| 13 | 0,037435 | 39 | 0,999842 | 0,037429 |
| 14 | 0,022461 | 42 | 0,999231 | 0,022444 |
| 15 | 0,012578 | 45 | 0,99695 | 0,01254 |
| 16 | 0,006604 | 48 | 0,989999 | 0,006537 |
| 17 | 0,003263 | 51 | 0,972491 | 0,003173 |
| 18 | 0,001523 | 54 | 0,935612 | 0,001425 |
| 19 | 0,000673 | 57 | 0,870012 | 0,000586 |
| 20 | 0,000283 | 60 | 0,770575 | 0,000218 |
| 21 | 0,000113 | 63 | 0,641103 | 7,25E-05 |
| 22 | 4,32E-05 | 66 | 0,495242 | 2,14E-05 |
| 21 | 1,58E-05 | 69 | 0,352117 | 5,55E-06 |
|  |  |  |  |  |
| Totaal |  |  |  | 0,99945 |

De betrouwbaarheid is 0,99945, dus eigenlijk hebben ze geen van beiden gelijk.